Mathématiques 3. Analyse 2.

Chapitre 1 Equations différentielles linéaires du 1er et 2ème ordre.
Complément : Des cas d'équations différentielles non linéaires du 1er ordre.

Dans tout le chapitre, le terme "intervalle" désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Equations différentielles linéaires du premier ordre

I.1. Généralités

Définition 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta, \gamma : I \to \mathbb{K}$ des applications continues, J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $J \subset I$ et $y : J \to \mathbb{K}$ une application.
On dit que y est une solution sur J de l'équation différentielle du premier ordre

$$(e) \qquad \alpha y' + \beta y = \gamma$$

si et seulement si

y est dérivable sur J

$\forall x \in J, \quad \alpha(x) y'(x) + \beta(x) y(x) = \gamma(x)$.

On note S_J l'ensemble des solutions de (e) sur J.

Remarques

1°/ On suppose souvent que J est ouvert.

2°/ Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on appelle courbes intégrales de (e) les courbes représentatives des solutions de (e).

3°/ Si $\alpha \equiv 1$ et $\beta \equiv 0$, la résolution de (e) revient au calcul des primitives de γ sur I.

votre but, dans le cas général, d'exprimer les solutions de (e) à l'aide des primitives et de calculer celles-ci, quand c'est possible.

<u>définition 2</u> L'éq. diff. $\alpha y' + \beta y = \gamma$ (e) est dite normalisée (ou résolue en y') si et seulement si $\alpha = 1$.

<u>Problème des raccords</u>

Lorsque (e) n'est pas normalisée, on se ramène à une équation normalisée en divisant par la fonction α sur tout intervalle où α ne s'annule pas. Puis on "colle" les solutions en les points où α s'annule.

<u>Exemple-illustration</u> : Raccordement de classe C^1.

Supposons $I = \mathbb{R}$ et α s'annule en un seul point noté x_0.

Une application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est solution de (e) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

- La restriction y_1 à y sur $]-\infty, x_0[$ est solution de (e) sur $]-\infty, x_0[$.
- La restriction y_2 à y sur $]x_0, +\infty[$ est solution de (e) sur $]x_0, +\infty[$.
- y_1 admet une limite finie l_1 en x_0^-
- y_2 " l_2 en x_0^+ } $l_1 = l_2$
- $\lim_{x \to x_0^-} \frac{y_1(x) - l_1}{x - x_0} = l_1'$ et $\lim_{x \to x_0^+} \frac{y_2(x) - l_2}{x - x_0} = l_2'$ avec $l_1' = l_2'$

et $\alpha(x_0) l_1' + \beta(x_0) l_1 = \gamma(x_0)$.

On s'intéresse maintenant à l'équation différentielle linéaire du 1er ordre normalisée

$$(E) \qquad y' + a \cdot y = b.$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues.

On note (E_0) $\quad y' + ay = 0$,

st dite équation sans second membre associée à (E) notée (E.S.S.M)

I.2. Résolution de l'équation sans second membre

Quelques notations. I intervalle de $\mathbb{R}$.

$a : I \to \mathbb{K}$ une application continue.

(E_0) $y' + ay = 0$, $y : I \to \mathbb{K}$ st l'inconnue.

$$S_0 = \left\{ y : I \to \mathbb{K} \text{ avec } \left| \begin{array}{l} y \text{ dérivable sur } I \\ \text{et} \\ y' + ay = 0 \end{array} \right. \right\}$$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

Proposition. S_0 st $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve S_0 st un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^I$ formé des applications de I dans $\mathbb{K}$.

* $S_0 \neq \emptyset$ car l'application nulle notée θ st solution de (E_0)

* Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors : $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

- $\lambda y_1 + y_2$ st dérivable sur I.

- $$(\lambda y_1 + y_2)' + a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda \underbrace{(y_1' + a y_1)}_{\substack{=0 \\ (y_1 \in S_0)}} + \underbrace{(y_2' + a y_2)}_{\substack{=0 \\ (y_2 \in S_0)}} = 0.$$

Donc $\lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

Théorème 1 $$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda e^{-\int a(x)\,dx} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

ou $$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \end{array} \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A \text{ st une primitive de } a \text{ sur } I \right\}.$$

Démonstration.

a st continue, donc admet des primitives.

Soit A t.q. $\forall x \in I$ $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$ $x_0 \in I$

$$y' + ay = 0 \iff (y' + ay)e^{A} = 0 \iff (ye^{A})' = 0$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \ ye^{A} = \lambda$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \ y = \lambda e^{-A}$$

$$(ye^{A})' = y'e^{A} + y\underbrace{(e^{A})'}_{= A'e^{A} = ae^{A}}$$

<u>Remarque</u>: La méthode suivante est fausse.

$$y' + ay = 0 \iff \frac{y'}{y} = -a \iff \ln|y| = -A + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\iff |y| = \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

$$\iff y = \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- y peut apriori s'annuler en certains points de I.

<u>Exemples</u>

1°/ Résoudre $y' + y = 0$ (où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-x} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2°/ Résoudre $y' - e^{x^2} y = 0$ ($y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{E(x)} \end{array} \right\} \text{ où } E(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

<u>Résumé</u> ou mode opératoire. Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre et sans second membre, sur un intervalle I (ouvert) de $\mathbb{R}$, on commence par normaliser l'équation, puis sur chaque intervalle où le coefficient de y' est non nul, on applique le théorème précédent. Et à la fin, on étudie les raccords aux points où le coefficient de y' est nul.



I-3. Résolution de l'équation avec second membre

Notations

I intervalle de $\mathbb{R}$. $a, b : I \to \mathbb{K}$ applications continues.

(E) $\quad y' + ay = b$.

S l'ensemble des solutions de (E) sur I

(E_0) $\quad y' + ay = 0$

S_0 " " " (E_0) sur I.

a- Relation entre S et S_0

i/ $\forall y_1, y_2 \in S$, on a $y_1 - y_2 \in S_0$

En effet $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = y_1' + ay_1 - (y_2' + ay_2) = b - b = 0$.

ii/ $\forall y_1 \in S$ $\forall y_0 \in S_0$, alors $y_1 + y_0 \in S$

En effet $(y_1 + y_0)' + a(y_1 + y_0) = \underbrace{y_1' + ay_1}_{=b} + \underbrace{y_0' + ay_0}_{=0} = b + 0 = b$.

D'après ces deux résultats, si $S \neq \emptyset$, S est une droite affine dont la direction est la droite vectorielle S_0. En effet, $\forall y_1 \in S$:

$$S = \{ y_1 + y_0 \, ; \, y_0 \in S_0 \}.$$

Ainsi, une solution de (E) est la somme de deux solutions :

- une solution dite particulière de (E).
- une solution de (E_0).

b- Résolution de (E)

Soit A une primitive de a sur I et

$$e^A : I \to \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto e^{A(x)}$$



Soit y une application dérivable de I dans K.
alors

$$y' + ay = b \iff (y' + ay)e^{A} = be^{A}$$
$$\iff (ye^{A})' = be^{A}$$

Or be^{A} est continue sur I, donc admet une primitive sur I, soit B une primitive de be^{A}

donc $$y' + ay = b \iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ ye^{A} = B + \lambda\right)$$
$$\iff \left(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ y = Be^{-A} + \lambda e^{-A}\right)$$

Théorème 2

1°/ La solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

2°/ Une solution particulière de (E) est Be^{-A} où

i/ A est une primitive de a sur I

ii/ B est une primitive de be^{A} sur I.

c/ Méthode pratique de résolution de (E)

On résout d'abord (E_0). On détermine après une solution particulière de (E) de la façon suivante :

i/ Il se peut que (E) admette une solution évidente. Par exemple si (E) : $y' + y.e^{x} = e^{x}$ une solution évidente est $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$.

ii/ si le second membre b de (E) s'écrit $b = \sum_{K=1}^{n} b_K$, on pourra déterminer pour chaque équation (E_K) $y' + ay = b_K$ une solution particulière y_K, et par suite $\sum_{K=1}^{n} y_K$ est une solution particulière de (E). Car

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)' + a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (y_k' + a y_k) = \sum_{k=1}^{n} b_k = b.$$

Cette propriété s'appelle le principe de superposition des solutions.

iii| <u>Méthode de variation de la constante</u>

Soit y_0 une solution particulière non nulle de (E_0). On cherche une solution y de (E) sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ fonction inconnue (dérivable sur I).

On a $\cdot$ $y' + ay = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 + \lambda y_0' + \lambda a y_0 = b \Leftrightarrow \lambda' y_0 = b$

$(y_0' + a y_0 = 0)$

Or $y_0(x) \neq 0 \; \forall x \in I$, alors $\lambda' = \frac{b}{y_0} \Rightarrow \lambda = \int \frac{b(x)}{y_0(x)} dx$.

d| <u>Exemples</u>

1°| (E) $y' + xy = x$; $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

La solution générale de l'équation sans second membre (E_0) est $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution (évidente) de (E) est $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$.

Donc $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

2°| (E) $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$, $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

- La solution générale de l'équation sans second membre est $y_0 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda e^{-x} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

D'après le principe de superposition des solutions, nous cherchons une solution particulière pour chacune des deux équations

(E_1) $y' + y = 2e^x$

(E_2) $y' + y = 4\sin x + 3\cos x$



une solution évidente de (E_1) : y_1 ...

Une solution particulière de (E_2) sera de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2'(x) + y_2(x) = 4\sin x + 3\cos x$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (-\beta + \alpha)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x = 4\sin x + 3\cos x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\beta + \alpha = 4 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{7}{2}, \ \beta = -\frac{1}{2}\right)$

On déduit alors une solution particulière de E :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x. \end{array}$$

Enfin $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x} + \frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \lambda e^{-x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$

3°/ $(E) \quad y' + \frac{x}{x^2+1} y = \frac{1}{x^2+1}, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

La solution générale de l'équation sans second membre est : $x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{x}{1+x^2}dx} = \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$= \lambda y_0(x)$$

Pour déterminer une solution particulière de (E), on appliquera la méthode de la variation de la constante. On cherchera une solution y de (E) de la forme $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ où $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une inconnue (supposée dérivable).

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} y(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \lambda(x) y_0(x)}_{0} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

et $y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$

Enfin $S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

e - Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale.

Théorème 3 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues, (E) $y' + ay = b$, $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$

Il existe une solution et une seule y de (E) sur I telle que $y(x_0) = y_0$

Preuve : D'après le théorème 2, la solution générale de (E) sur I est

$$y = Be^{-A} + \lambda e^{-A}, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alors $y(x_0) = y_0 \iff B(x_0) e^{-A(x_0)} + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0$.

$$\iff \lambda = y_0 e^{A(x_0)} - B(x_0).$$

Ceci montre l'existence et l'unicité de λ, donc de y.

f - Problème des raccords

On considère l'équation différentielle non normalisée

(e) $\alpha y' + \beta y = \gamma$

et supposons que α s'annule en un et un seul point x_0 et $x_0 \in I$.

On résout (e) sur chacun des deux intervalles $I_1 =]-\infty, x_0[\cap I$ et $]x_0, +\infty[\cap I$ (sur I_1 et I_2, (e) peut être normalisée) puis on cherche si on peut "raccorder" au point x_0 les solutions de (e) sur I_1 et I_2.



(e) $2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$

sur tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ (y est à image dans $\mathbb{R}$)

On résolvera l'équation normalisée

(E) $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1+x)}$

et on étudiera les raccords en -1 et 0.

1) Résolution de (E).

supposons $-1 \notin I$ et $0 \notin I$.

La solution générale de (E_0) $y' + \frac{1}{2x}y = 0$ sur I

est $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{1}{2x}dx} = \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}}$; $\lambda \in \mathbb{R}$. $y_0(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

Pour déterminer une solution particulière de (E), on utilisera la méthode de la variation de la constante.

En posant $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ et injectant dans (E), on obtient

$$(E) \Leftrightarrow \forall x \in I, \ \lambda'(x) y_0(x) = \frac{1}{2x(1+x)}$$

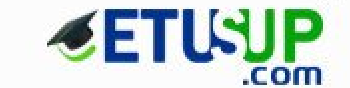
Posons $\varepsilon = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On a.

$$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{|x|}}{2x(1+x)} dx = \int \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1+x)} dx.$$ Alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{on pose} \\ u = \sqrt{\varepsilon x} \end{array} \right.$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan}\sqrt{x} & \text{si } \varepsilon = 1 \ (\text{c.à.d } I \subset]0,+\infty[) \\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } \varepsilon = -1 \ (\text{c.à.d. } I \subset]-\infty,0[) \end{cases}$$

On alors

$$S = \begin{cases} \left\{ x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}} = y_1(x),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } I \subset]0,+\infty[\\ \left\{ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| + \frac{\mu}{\sqrt{-x}} = y_2(x),\ \mu \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } I \subset]-\infty,0[. \ (\text{et } -1 \notin I) \end{cases}$$



2| Raccords

a| Raccord en 0. On suppose que $0 \in I$ et $-1 \notin I$

- $y_1(x)$ admet une limite finie en 0^+ ssi $\lambda = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} y_1(x) = 1$.
- $y_2(x)$ admet une limite finie en 0^- ssi $\mu = 0$ et $\lim_{x \to 0^-} y_2(x) = 1$.

Ainsi, il y a raccord par continuité en 0 ssi $\lambda = \mu = 0$ et la solution est alors

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Etudions maintenant la dérivabilité de y en 0.
Le calcul des limites se fait à l'aide des D.L.

Pour $x > 0$ $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3}$.

Pour $x < 0$ $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{2x\sqrt{-x}} \left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) - 2\sqrt{-x} \right)$
$= -\dfrac{1}{3}$.

y est dérivable en 0 et $y'(0) = -\dfrac{1}{3}$.

Pour $x = 0$, $y(0) = 1$ et ça vérifie

$$x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = 1$$

Donc $S = \left\{ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}\right| & \text{si } x < 0 \end{cases} \right\}$

b| Raccord en -1. Pour que le raccord en -1 soit possible, il faut que la "solution" vérifie (e) en -1.

$$2x(1+x)y'(x) + (1+x)y(x) = +1.$$ On aurait $0 = 1$.

Ce qui n'est pas possible.

Mode opératoire.

1| Normalisation
2| Résolution sur les différents intervalles
3| Etude des raccords.

I - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et à second membre de type exponentielle - polynôme

II.1 Généralités

On appelle exponentielle - polynôme toute application de la forme $I \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{K}[X])^n$.

Définition Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$, $h : I \to \mathbb{K}$ une exponentielle polynôme. J intervalle de $\mathbb{R}$ t.q $J \subset I$ $y : J \to \mathbb{K}$ application.

y est dite une solution sur J de

(e) $\alpha y'' + \beta y' + \gamma y = h$ si et seulement si $\begin{cases} y \text{ est 2 fois dérivable sur } J \\ \forall x \in J,\ \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = h(x) \end{cases}$

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (J, y) où J intervalle de $\mathbb{R}$, $J \subset I$ et y une solution sur J de (e).

On suppose $\alpha \neq 0$ (sinon (e) est une éq. diff. du 1er ordre linéaire).

L'équation (e) est équivalente à

(E) $y'' + a y' + b y = g$ où $a = \frac{\beta}{\alpha}$, $b = \frac{\gamma}{\alpha}$ et $g = \frac{h}{\alpha}$.

L'équation sans second membre associée à (E) est

(E_0) $y'' + a y' + b y = 0$

II.2. Résolution de l'équation sans second membre

Notations : I intervalle de $\mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{K}$,
(E_0) $y'' + a y' + b y = 0$, y $I \to \mathbb{K}$ fonction inconnue supposée 2 fois dérivable

S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.



1°/ **Proposition** S_0 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve . $S_0 \neq \emptyset$, l'application "nulle" est solution de (E_0)

. Soient $y_1, y_2 \in S_0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. alors

* $\lambda y_1 + y_2$ est 2 fois dérivable sur I.

* $(\lambda y_1 + y_2)'' + a(\lambda y_1 + y_2)' + b(\lambda y_1 + y_2)$

$$= \lambda \underbrace{(y_1'' + a y_1' + b y_1)}_{=0} + \underbrace{(y_2'' + a y_2' + b y_2)}_{=0} = 0$$

$\lambda y_1 + y_2 \in S_0$.

2°/ Résolution de (E_0)

On va chercher d'éventuelles solutions de (E_0) de la forme $R(x) = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{K}$, $x \in I$. On a

$$\forall x \in I \qquad (R'' + aR' + bR)(x) = (r^2 + ar + b)e^{rx}$$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique de (E_0), Soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant

a/ ~~On suppose que Δ admet au~~

On suppose que l'équation caractéristique de (E_0) admet au moins une solution notée ρ ($\rho \in \mathbb{K}$).

L'application $R : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto e^{\rho x}$ est une solution de (E_0) sur I.

On pose $\forall x \in I$, $z(x) = y(x)e^{-\rho x}$. On a alors z est 2 fois dérivable sur I.

$y(x) = z(x)e^{\rho x}$, $y'(x) = \rho z(x) e^{\rho x} + z'(x) e^{\rho x}$

$y''(x) = \rho^2 z(x) e^{\rho x} + 2\rho z'(x) e^{\rho x} + z''(x) e^{\rho x}$

d'où

$$(y'' + ay' + by)(x) = \underbrace{(\rho^2 + a\rho + b)}_{=0} z(x) e^{\rho x} + (2\rho + a) z'(x) e^{\rho x} + z''(x) e^{\rho x}$$

$(E_0) \iff (2\rho + a) z' + z'' = 0$ équation linéaire du 1er degré en z'

dont la solution générale est donnée par

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \lambda e^{-(2\rho + a)x}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

deux situations se présentent :

i| $2\rho+a\neq 0$, alors $\forall x\in I$, $z(x)=\frac{-\lambda}{2\rho+a}e^{-(2\rho+a)x}+\lambda_2$, $\lambda_2\in\mathbb{K}$.

Ainsi, en notant $\lambda_1=-\frac{\lambda}{2\rho+a}$, la solution générale de (E_0) est alors

$$y : I \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto \lambda_1 e^{-(\rho+a)x}+\lambda_2 e^{\rho x},\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}.$$

$-(\rho+a)$ étant l'autre solution de l'éq. caractéristique. On note $r_1=-(\rho+a)$, $r_2=\rho$, on obtient alors

$$S_0=\left\{\begin{array}{l} I\to\mathbb{K}\\ x\mapsto \lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}\end{array},\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}\right\}.$$

ii| $2\rho+a=0$ (c'est à dire que ρ est une solution double de l'éq. caractéristique)

alors : $\forall x\in I$, $z(x)=\lambda x+\mu$, $\mu\in\mathbb{K}$ et alors

$$S_0=\left\{\begin{array}{l} I\longrightarrow\mathbb{K}\\ x\longmapsto(\lambda x+\mu)e^{-\frac{a}{2}x}\end{array},\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}\right\}$$

c| si l'équation caractéristique de (E_0) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$ (c'est à dire si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\Delta<0$).

L'éq. caractéristique admet 2 racines dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et on cherche une solution : $y:I\longrightarrow\mathbb{C}$ 2 fois dérivable sur I avec $y''+ay'+by=0$ et on ne conserve que les solutions à valeurs réelles.

On a $\forall x\in I$ $y(x)=\lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$ avec $\begin{cases} r_1=\frac{-a-i\sqrt{-\Delta}}{2}\\ r_2=\frac{-a+i\sqrt{-\Delta}}{2}=\overline{r_1}\end{cases}$

$$y(I)\subset\mathbb{R}\iff\forall x\in I,\ \overline{\lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}}=\lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}$$
$$\iff\forall x\in I,\ \overline{\lambda_1}e^{r_2x}+\overline{\lambda_2}e^{r_1x}=\lambda_1e^{r_1x}+\lambda_2e^{r_2x}$$
$$\iff\forall x\in I,\ (\overline{\lambda_2}-\lambda_1)e^{r_1x}=(\lambda_2-\overline{\lambda_1})e^{r_2x}$$
$$\iff\forall x\in I,\ \overline{\lambda_2}-\lambda_1=(\lambda_2-\overline{\lambda_1})e^{i\sqrt{-\Delta}x}.$$
$$\iff\overline{\lambda_2}-\lambda_1=\lambda_2-\overline{\lambda_1}=0$$

$\{1, e^{i\sqrt{-\Delta}x}\}$ est une $\mathbb{K}$-famille libre.

Par suite $y(I)\subset\mathbb{R}\iff\lambda_2=\overline{\lambda_1}$.

$$S_0=\left\{\begin{array}{l} I\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\lambda_1e^{r_1x}+\overline{\lambda_1}e^{\overline{r_1}x}\end{array},\ \lambda_1\in\mathbb{C}\right\}$$



En posant $\lambda_1 = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in I$

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \bar{\lambda}_1 e^{\bar{r}_1 x} = 2 e^{-\frac{a}{2}x} \left[u \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\, x}{2}\right) - v \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\, x}{2}\right) \right]$$

et par suite

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-\frac{a}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right) \right] \end{array}, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Théorème 4</u> L'ensemble des solutions de (E_0) sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Soient $r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique associée à (E_0) et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant.

<u>1er cas</u> $r^2 + ar + b = 0$ admet dans $\mathbb{K}$ deux racines r_1 et r_2 distincts $\left(\begin{array}{c} \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et } \Delta > 0 \\ \text{ou} \\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ et } \Delta \neq 0 \end{array} \right)$ Alors $S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \right\}$

<u>2ème cas</u> $r^2 + ar + b = 0$ admet dans $\mathbb{K}$ une racine double $r = -\frac{a}{2}$ (c.à.d. $\Delta = 0$) Alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{-\frac{a}{2}x} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

<u>3ème cas</u> $r^2 + ar + b = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{K}$ (c'est à dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$) Alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 \,\mathrm{Ré}\left(\lambda_1 e^{r_1 x}\right) \end{array}, \lambda_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

r_1 est une racine dans $\mathbb{C}$ de $r^2 + ar + b$.

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-\frac{a}{2}x} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x\right) \right] \end{array}, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Exemples</u>

1/ Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$ $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

L'éq. caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ admet 2 solutions distincts : 2 et 3. Donc :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2/ Résoudre : $y'' + w^2 y = 0$ ($w \in \mathbb{R}_+^*$ [illegible]).

L'équation caractéristique $r^2 + w^2 = 0$ admet deux solutions complexes non réelles : iw et $-iw$. Alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto A\cos wx + B\sin wx \end{array} ; A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

3°/ Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$ $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double : 2. Alors.

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} \end{array} , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

4°/ Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = 0$ $(y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C})$

On obtient alors

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto (\lambda x + \mu) e^{2x} \end{array} , \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

II. 3 Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme.

Notations : I intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$g : I \to \mathbb{K}$ une exponentielle-polynôme

(E) $y'' + ay' + by = g$ où $y : I \to \mathbb{K}$ inconnue supposée 2 fois dérivable.

S l'ensemble des solutions de (E) sur I.

1/ Liens entre S et S_0

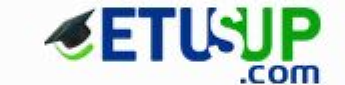
a/ $\forall y_1, y_2 \in S$, on a $y_1 - y_2 \in S_0$

b/ $\forall y_1 \in S$, $\forall y_0 \in S_0$, alors $y_1 + y_0 \in S$.

Ceci implique que pour tout $y_1 \in S$:

$$S = \{ y_1 + y_0 ; \; y_0 \in S_0 \}$$

[[La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0)]]



2| Principe de superposition des solutions

On a $\forall x \in I \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k x} P_k(x)$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{K}$, $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{K}[X]$

on note $g_k(x) = e^{m_k x} P_k(x)$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$, soit y_k une solution de

$(E_k) \qquad y''(x) + a y'(x) + b y(x) = e^{m_k x} P_k(x) \qquad x \in I$.

Alors $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution de (E)

3| Détermination d'une solution de

$(E_k) \quad y'' + a y' + b y = g_k$.

Posons $z(x) = y(x) e^{-m_k x}$, $x \in I \iff y(x) = e^{m_k x} z(x)$.

On a alors :

y est solution de (E_k) sur I si et seulement si

z est solution sur I de

$(F_k) \quad (m_k^2 + a m_k + b) z(x) + (2 m_k + a) z'(x) + z''(x) = P_k(x)$

<u>Théorème</u>. Recherche d'une solution particulière de (E)

Pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe une solution y_k de (E_k) de la forme $y_k : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto e^{m_k x} Q_k(x) \end{array}$

où Q_k est un polynôme de degré :

1°| $\deg(P_k)$ si m_k n'est pas solution de $r^2 + ar + b = 0$.

2°| $1 + \deg(P_k)$ si m_k est solution simple de $r^2 + ar + b = 0$

3°| $2 + \deg(P_k)$ si m_k est solution double de $r^2 + ar + b = 0$.

Une solution de (E) est alors $\sum_{k=1}^{n} y_k$.

<u>Remarque</u> : Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et g est de type

$g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto P(x) \cos mx + Q(x) \sin mx \end{array}$, $m \in \mathbb{R}^*$

$P, Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe une solution y de (E)

de la forme $y : I \to \mathbb{R}$
$x \mapsto A(x)\cos mx + B(x)\sin mx$

où $A, B \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq$ à :

+ $\text{Max}(\deg P, \deg Q)$ si im n'est pas solution de $r^2+ar+b=0$.

+ $1 + \text{Max}(\deg P, \deg Q)$ si im est solution simple de $r^2+ar+b=0$.

Exemples

1°/ Résoudre $y'' - 4y' + 4y = (x^2+1)e^x$ $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

L'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$ admet une solution double : 2. La solution générale de (E_0) est alors $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Du fait que 1 n'est pas solution de $r^2 - 4r + 4 = 0$, une solution particulière de (E) notée y_1 sera de la forme $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto Q(x)e^x$ où $d°Q = 2$.

On pose $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, α, β, γ à déterminer

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y_1(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$ est solution de (E) si et seulement si

$$[(\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)x + (\gamma - 2\beta + 2\alpha)]e^x = (x^2+1)e^x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 4\alpha = 0 \\ \gamma - 2\beta + 2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 7 \end{cases}$$

Donc $y_1(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$ est solution de (E)

$$S = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2+4x+7)e^x + (\lambda x + \mu)e^{2x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}.$$

2°/ Résoudre : $y'' + y = \cos^3 x$ $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$ (linéarisation)

On va utiliser le principe de superposition des solutions.

La solution générale de (E_0) est de la forme

$y_0(x) = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

i) $\frac{3}{4}\cos x = g_1(x)$

Puisque i est solution de l'équation caractéristique il existe une solution y_1 de

(E_1) $\quad y'' + y = \frac{3}{4}\cos x$

de la forme $y_1(x) = (\alpha x + \beta)\cos x + (\gamma x + \delta)\sin x$.

; α, β, γ et $\delta \in \mathbb{R}$ (à trouver) ; qu'on injecte dans (E_1)

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\gamma\cos x - 2\alpha\sin x = \frac{3}{4}\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = \frac{3}{8} \end{cases}$

Une solution de (E_1) est alors $y_1(x) = \frac{3}{8}x\sin x$

ii) $\frac{1}{4}\cos 3x = g_2(x)$. Du fait que $3i$ n'est pas solution de $r^2 + 1 = 0$, il existe une solution y_2 de

(E_2) $\quad y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x$ de la forme

$y_2(x) = u\cos 3x + v\sin 3x$, $u, v \in \mathbb{R}$ qu'on injecte dans (E_2) pour récupérer

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-8u\cos 3x - 8v\sin 3x = \frac{1}{4}\cos 3x \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{32} \\ v = 0 \end{cases}$

Une solution de (E_2) est alors $y_2(x) = -\frac{1}{32}\cos 3x$.

L'ensemble des solutions de (E) est alors

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{3}{8}x\sin x - \frac{1}{32}\cos 3x + A\cos x + B\sin x, \\ \qquad A, B \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$



II Complément : exemples d'études d'équations différentielles non linéaires du 1er ordre

II-1 Généralités

Définition. Soient $U \subset \mathbb{R}^3$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, I intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle solution sur I de l'équation différentielle.

$$(e) \qquad F(x, y, y') = 0$$

toute application $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

y est dérivable sur I

$\forall x \in I$; $(x, y(x), y'(x)) \in U$

$\forall x \in I$ $F(x, y(x), y'(x)) = 0$

Résoudre (e), c'est déterminer tous les couples (I, y) où I intervalle de $\mathbb{R}$ et y solution sur I de (e)

On appelle courbes intégrales de (e) les courbes représentatives de solutions de (e).

Il est souvent utile, si c'est possible, d'exprimer, dans (e), y' en fonction de x et y. Donc se ramener à

$$(E) \qquad y' = f(x, y) \quad \text{où } f : V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ et } V \subset \mathbb{R}^2.$$

Exemples

1/ (e) $(1+x^2)y' - xy^2 + 1 = 0$ $\Rightarrow$ (E) $y' - \frac{x}{1+x^2}y^2 + \frac{1}{1+x^2} = 0$

2) (e) $(1-x^2)y' - \sin y + x$ se ramène à (E) $y' = \frac{\sin y - x}{1 - x^2}$

et étudier des raccords en -1 et 1.

3) (e) $yy'^2 - \sin y' + x^2 + 1 = 0$ ne se ramène pas simplement à une équation normalisée.

On se limitera à l'étude de quelques types d'équations différentielles non linéaires du 1er ordre.

III.2 Equations différentielles à variables séparables

Il s'agit de (e) $a(x) + b(y)y' = 0$, où a, b des applications continues sur des intervalles à préciser.

Méthode de résolution

Soient A, B des primitives de a et b.
Pour qu'une application $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable soit solution de (e) sur I $\Leftrightarrow$ l'application

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto A(x) + B(y(x)) \end{aligned}$$

soit constante. On obtient alors l'éq. cartésienne des courbes intégrales :

$$A(x) + B(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Souvent, il ne sera pas possible d'exprimer y en fonction de x explicitement.

Exemple (e) $(1+x^2)y' - (1+y^2) = 0$

(e) $\Leftrightarrow \dfrac{y'}{1+y^2} = \dfrac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\, y = \mathrm{Arctan}\, x + C, C \in \mathbb{R}$.

$C \in]-\pi, \pi[$.

Si $C \neq -\frac{\pi}{2}$ et $C \neq \frac{\pi}{2}$, alors $y = \tan(\mathrm{Arctan}\, x + C)$

$$= \frac{x+\lambda}{1-\lambda x} \quad \text{avec } \lambda = \tan C \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Si $C = \frac{\pi}{2}$, alors $x < 0$ et $\mathrm{Arctan}\, y = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(-x)$

$$= \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{-x}$$

D'où $y = -\dfrac{1}{x}$

De même si $C = -\frac{\pi}{2}$ alors $x > 0$ et $y = -\frac{1}{x}$.

On a trois couples de solutions de (e) (I, y)

a/ $y(x) = \dfrac{x+\lambda}{1-\lambda x}$, $\lambda \neq 0$ et $I \subset]-\infty, \frac{1}{\lambda}[$ ou $I \subset]\frac{1}{\lambda}, +\infty[$

b/ $y(x) = x$ $\quad I \subset \mathbb{R}$.

c/ $y(x) = -\dfrac{1}{x}$ $\quad I \subset]-\infty, 0[$ ou $I \subset]0, +\infty[$

III.3 Equations de Bernoulli

C'est des équations de la forme

$$(e) \quad A y' + B y + C y^{\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \ (\alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1)$$

et A, B, C des fonctions continues.

Méthode de résolution

On pose $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$. Alors (e) devient

$$\frac{1}{1-\alpha} A z' + B z + C = 0$$

équation différentielle linéaire du 1er ordre en z.

On obtient $z(x)$ puis $y(x)$.

Remarque. Pour $\alpha = 2$, poser $z = \frac{1}{y}$ revient à supposer que $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. On n'obtiendra que des solutions ne s'annulant en aucun point.
D'autres solutions échappent peut-être à cette façon de faire.

Exemple $\quad (e) \quad x y' + y - x y^3 = 0.$

Notons $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3}$ et par suite

$$(e) \Leftrightarrow \quad x z' - 2z + 2x = 0.$$

En supposant $I \subset \mathbb{R}_-^*$ ou $I \subset \mathbb{R}_+^*$, on se ramène à l'équation linéaire du ordre normalisée

$$(E) \quad z' - \frac{2}{x} z = -2.$$

La solution générale de (E) est $z(x) = 2x + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}.$

T.V.I (continue sur I et ne s'annule pas sur I) $\Rightarrow y(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2x + \lambda x^2}}$ $\quad \varepsilon = 1$ ou -1 et $\lambda \in \mathbb{R}$.



III.4 Equations de Riccati

C'est des équations de la forme

(e) $A y' + B y + C y^2 + D = 0$, A, B, C, D des fonctions continues.

Lorsque $D = 0$, on a un cas particulier de l'équation de Bernoulli.

Méthode de résolution

Supposons connue une solution y_0 de (e), et notons $Y = y - y_0$. Alors y solution de (e) si et seulement si

$$A(y_0+Y)' + B(y_0+Y) + C(y_0+Y)^2 + D = 0$$

$$\overset{(\Leftrightarrow)}{} \quad A Y' + (B + 2Cy_0) Y + C Y^2 = 0 \quad \text{Eq. de Bernoulli}$$

On posera donc $z = \frac{1}{Y}$ pour se ramener à une équation linéaire en z.

Exemple (E) $y' + 3y + y^2 + 2 = 0$.

Une solution évidente (sur $\mathbb{R}$) est $x \mapsto -1$.

Posons $Y = y+1$. (E) $\Leftrightarrow$ $Y' + Y + Y^2 = 0$ (F)

On pose $z = \frac{1}{Y}$, alors (F) devient

$$-z' + z + 1 = 0 \quad (G)$$

La solution générale (en z) est $z(x) = -1 + \lambda e^x$, d'où la solution générale de (E) est

$$y(x) = -1 + \frac{1}{-1+\lambda e^x} = -\frac{\lambda e^x - 2}{\lambda e^x - 1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$y(x) = -2$,

